ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

PHẠM VĂN MẠNH

ĐƯỜNG TRÒN LESTER VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS.TS. NGUYỄN VIỆT HẢI
TS. ĐOÀN QUANG MẠNH

THÁI NGUYÊN 2021

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo trường Đại Học Khoa Học và các quý thầy cô giảng dạy lớp cao học K12B (2018 - 2020) trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu của các môn học cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi đã luôn nhận được sự hướng dẫn nhiệt tình của PSG.TS. Nguyễn Việt Hải và TS. Đoàn Quang Mạnh là các giảng viên Trường Đại Học Hải Phòng. Tôi xin chân thành cảm ơn sâu sắc đến các thầy với những điều mà các thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các đồng chí trong ban giám hiệu trường THCS Lê Lợi - Quận Hải An và gia đình, bạn bè của tôi. Đó là những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn. Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 01 năm 2021

Người viết Luận văn

Phạm Văn Mạnh

Danh mục các hình

MỘT SỐ KÝ HIỆU TRONG LUẬN VĂN

Stt	Ký hiệu	Nội dung ký hiệu	Trang
1	$(x:y:z)$	Tọa độ barycentric	8
2	$X(n)$	Tâm tam giác thứ n trong [6]	8
3	σ	$= 2S_{ABC}$	9
4	$\overline{XYZ}$	Tam giác pedal	8
5	O_9	Tâm đường tròn chín điểm	10
6	$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$	ký hiệu	11
7	$K_(\theta)$	Tâm phối cảnh Kiepert tham số θ	16
8	N_1, N_2	Điểm Napoleon dương, âm	16
9	$\mathcal{L}$	Đường thẳng vô tận	18
10	$(f:g:h)$	Điểm vô tận	20
11	$\overline{PQR}$	Diện tích đại số	21
12	J_+, J_-	Hai điểm Isodynamic	28
13	F_+, F_-	Hai điểm Torricelli-Fermat	29
14	$\sum\limits_{\circlearrowright}$	Lấy tổng theo hoán vị a,b,c	40
15	J_e	Tâm Jerabek	42
16	C_W	Điểm Clawson	53

Giới thiệu luận văn

1. Mục đích của đề tài luận văn

Liên quan đến hai điểm Torricelli-Fermat nổi tiếng là một họ các đường tròn trong đó có những đường tròn xác định bởi điểm thứ ba trong tam giác, điểm thứ ba đó có thể là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm, trọng tâm,... Chính Lester đã định nghĩa đường tròn mang tên ông bằng cách như vậy. Đường tròn Lester có những tính chất gì? Khảo sát đường tròn này bằng phương pháp tọa độ (barycentric) cho ta những kết quả gì? Có những vấn đề gì liên quan đến các điểm Torricelli-Fermat và đường tròn Lester?... Đó là lý do mà chúng tôi chọn đề tài "**Đường tròn Lester và một số vấn đề liên quan**".

Mục đích của đề tài là:

- Trình bày những đặc trưng của điểm Torricelli-Fermat F_+, F_- trong tam giác. Từ đó giới thiệu đường tròn Lester là đường tròn đi qua 3 điểm F_+, F_-, O với (O là tâm đường tròn ngoại tiếp). Tài liệu tham khảo chính ở đây là [1], [8].

- Tìm thêm các tính chất hình học của các điểm Torricelli-Fermat bằng các tính toán đại số trên tọa độ barycentric. Ngoài đường tròn Lester, chúng tôi cũng muốn khảo sát thêm các đường tròn khác trong chùm đường tròn đi qua 2 điểm Torricelli-Fermat.

- Đề cập đến các chuyên đề mới, hay và khó chưa được giới thiệu trong chương trình Hình học phổ thông, trong các giáo trình Hình học sơ cấp.

2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Dựa vào các tài liệu chính [1], [2] và [8], luận văn nhắc lại và bổ sung các định nghĩa, tính chất của tọa độ barycentric, các điểm Torricelli-Fermat. Từ đó xây dựng khái niệm và các tính chất đặc trưng của đường tròn Lester trong tam giác. Ba vấn đề liên quan cũng là những ứng dụng và phát triển thêm từ các nội dung trên. Nội dung của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1.Kiến thức chuẩn bị

Trình bày tóm tắt hai nội dung "Phép đối xứng qua đường tròn", thực chất là Phép nghịch đảo dương, và "Tọa độ barycentric thuần nhất". Một số chứng minh trong phần này rất có ích về mặt phương pháp cho các chương sau.

1.1. Phép đối xứng qua đường tròn

1.2. Tọa độ barycentric thuần nhất

Chương 2. Điểm Torricelli-Fermat và đường tròn Lester

Chương này là nội dung trọng tâm của luận văn: Điểm Torricelli-Fermat và đường tròn Lester. Trong đó trình bày chi tiết các tính chất của điểm Torricelli-Fermat và đường tròn Lester, các biểu diễn tọa độ và phương trình của chúng trong tọa độ barycenteric. Mối quan hệ đặc biệt giữa đường tròn Lester và các điểm và đường tròn khác cho ta một số cách dựng đường tròn Lester khác ngoài cách dựng thông thường.

Chương này có tham khảo, chọn lọc trong các tài liệu [3], [8] và bổ sung các chứng minh chi tiết. Nội dung bao gồm

2.1. Điểm Torricelli-Fermat

2.2. Đường tròn Lester

2.3. Các đường tròn trực giao với đường tròn Lester

2.4. Tọa độ tâm Lester.

Chương 3. Một số vấn đề liên quan

Dựa vào các tính chất đặc trưng của điểm Torricelli-Fermat và đường tròn Lester chúng tôi đưa ra ứng dụng và giới thiệu các mở rộng về hai đường tròn (F_+F_-G) và (F_+F_-H). Nội dung được tham khảo chính trong [2], [8]. Chương 3 bao gồm

3.1. Dựng nhanh một số tâm tam giác

3.2. Các đường tròn khác liên quan đến 2 điểm Fermat

3.3. Điểm Clawson và đường tròn Lester thứ hai

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi nhắc lại hai nội dung chính dùng cho các chương sau. Đó là một phần quan trọng của phép nghịch đảo dưới tên gọi là "phép đối xứng qua đường tròn" và tọa độ barycentric. Những nội dung này ít nhiều đã có trong các giáo trình hình học sơ cấp.

1.1 Phép đối xứng qua đường tròn

1.1.1 Định nghĩa và tính chất

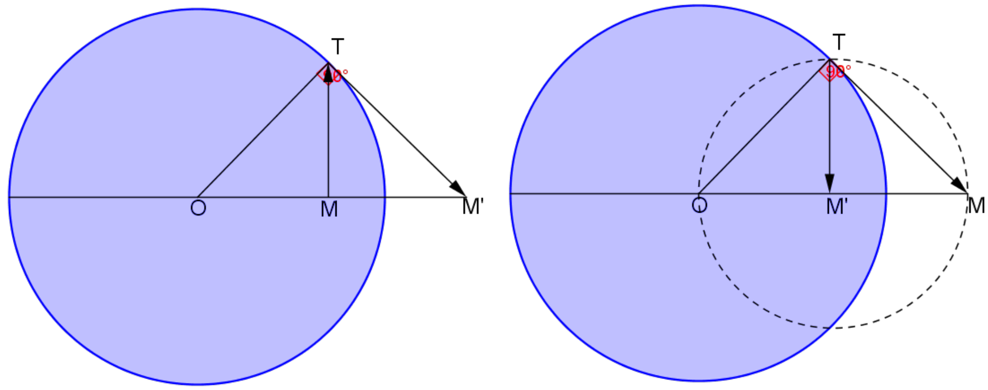
Định nghĩa 1.1. *Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Phép biến hình biến mọi điểm $M \neq O$ thành điểm M' thỏa mãn: M, O, M' thẳng hàng và $OM.OM' = R^2$ được gọi là phép đối xứng qua đường tròn hay phép nghich đảo. Khi đó đường tròn (O, R) được gọi là đường tròn nghịch đảo.*

Ta có ngay các nhận xét sau:

- Phép đối xứng qua đường tròn (O, R) là trường hợp đặc biêt của phép nghịch đảo cực là O, phương tích R^2. Đây là phép nghịch đảo dương. Ảnh đối xứng của điểm được dựng trên hình 1.1 a), b).
- Phép đối xứng qua đường thẳng có thể coi là trường hợp riêng của phép đối xứng qua đường tròn (khi bán kính R lớn tùy ý), do vậy sẽ có nhiều tính chất tương tự giữa hai phép đối xứng này.

Từ tính chất của phép nghịch đảo cực O, phương tích p tùy ý ta suy ra các tính chất của phép đối xứng qua đường tròn:

(a) Phép đối xứng qua đường tròn có tính chất đối hợp. Nghĩa là nếu A đối xứng với



Hình 1.1: M và M' đối xứng nhau qua (O, R)

A' thì A' đối xứng với A qua đường tròn (O, R).

(b) Phép đối xứng qua đường tròn (O, R) biến những điểm ở trong (O, R) thành những điểm ở ngoài và ngược lại, Hình 1.1 a), b).

(c) P và Q đối xứng với nhau qua (O, R) khi và chỉ khi mọi đường tròn $\mathcal{C}$ đi qua P, trực giao với (O, R) phải đi qua Q.

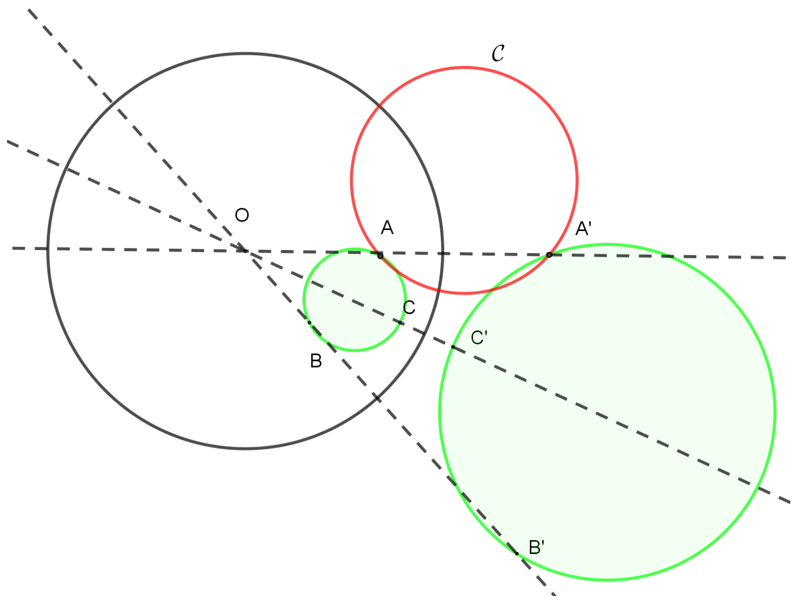
(d) Trong phép đối xứng qua đường tròn, (O, R) là hình kép tuyệt đối. Mọi đường thẳng đi qua O và mọi đường trực giao với (O, R) đều là các hình kép tương đối.

(e) Phép đối xứng qua đường tròn biến mọi đường tròn đi qua O thành đường thẳng không đi qua O, biến mọi đường thẳng không đi qua O thành đường tròn đi qua O và biến mọi đường tròn không đi qua O thành đường tròn không đi qua O. Đường thẳng qua O biến thành chính nó.

Hệ quả 1.1.1. *Ba đường tròn đi qua O biến thành ba đường thẳng và ba đường thẳng này sẽ đồng quy tại một điểm.*

Hệ quả 1.1.2. *Ba đường thẳng đồng quy (không qua O) sẽ biến thành ba đường tròn có hai điểm chung, trong đó một điểm là điểm O*

Hệ quả 1.1.3. *Phép đối xứng qua đường tròn bảo toàn sự tiếp xúc, song song và trực giao giữa các đường thẳng hoặc đường tròn.*



Hình 1.2: Tính chất của phép đối xứng qua (O, R)

1.1.2 Một số định lý quan trọng

Định lý 1.1. *Nếu A', B' là đối xứng của A, B qua (O, R) thì*
$A'B' = \dfrac{R^2}{OA.OB}$ *hay* $AB = \dfrac{R^2}{OA'.OB'}$

Định lý 1.2. *Ba điểm A, B, C không thẳng hàng có A', B', C' tương ứng là ảnh đối xứng qua (O, R). Khi đó đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$ là ảnh đối xứng của đường tròn ngoại tiếp ΔABC*

Định lý 1.3. *Phép đối xứng qua đường tròn bảo toàn tỷ số kép của 4 điểm*

1.2 Tọa độ barycentric thuần nhất

Tọa độ barycentric thuần nhất đã được trình bày chi tiết trong [6]. Ở đây chúng tôi hệ thống lại một số kết quả cần thiết để sử dụng vào chương 2 và chương 3. Một số tính toán sẽ được làm chi tiết hơn để làm quen với phương pháp tọa độ.

1.2.1 Định nghĩa và tính chất

Trên mặt phẳng cố định coi ΔABC là tam giác cơ sở. Ký hiệu $\overline{XYZ}$ là diện tích đại số của ΔXYZ theo nghĩa giá trị tuyệt đối của $\overline{XYZ}$ bằng diện tích ΔXYZ và mang dấu dương nếu hướng đi X, Y, Z là chiều quay ngược kim đồng hồ, mang dấu âm nếu X, Y, Z đi theo hướng ngược lại. Ta có định nghĩa

Định nghĩa 1.2. *Chọn ΔABC là tam giác cơ sở, hướng A, B, C ngược chiều kim đồng hồ. Tọa độ barycentric của điểm M đối với ΔABC là bộ ba số $(x : y : z)$ sao cho*

$$x : y : z = \overline{MBC} : \overline{MCA} : \overline{MAB}.$$

Từ định nghĩa ta nhận thấy nếu $M = (x : y : z)$ thì cũng có $M = (kx : ky : kz)$, $k \neq 0$

Bách khoa toàn thư về các tâm của tam giác (Encyclopedia of Triangle Centers, viết tắt: ETC) là một từ điển trực tuyến về các điểm đặc biệt trong tam giác. Từ điển này do Clark Kimbering, một giáo sư toán học trường đại học Evansville chủ biên, [5]. Các điểm có tính chất đặc biệt trong tam giác còn được gọi là tâm tam giác. Tính đến ngày 12 tháng 3 năm 2017, đã có hơn 1600 tâm tam giác được liệt kê trong [5]. Mỗi tâm tam giác được gán nhãn $X(n)$, chẳng hạn, $X(1)$ là tâm I đường tròn nội tiếp, $X(4)$ là trực tâm. Các thông tin về mỗi điểm bao gồm tọa độ tam tuyến tính (trilinear), tọa độ barycentric và những thông tin liên quan như: nằm trên đường thẳng nào, liên hệ như thế nào với các điểm khác... Mỗi tâm tam giác trong từ điển được gán một tên duy nhất, trong một số trường hợp đặc biệt tên của những điểm này được gán theo tên của người phát hiện hoặc đặt theo tên của một ngôi sao trên bầu trời mới tìm thấy ví dụ $X(770)$ được gọi là điểm Acamar. Acamar còn được gọi là Theta Eridani, là một hệ sao nhị phân nằm trong chòm sao Eridanus. Người ta cho rằng Acamar tượng trưng cho sự kết thúc của dòng sông thiên thể cho đến khi một ngôi sao sáng hơn có Achernar được phát hiện. Cho tam giác ABC, như thông thường, ký hiệu G, I, O, H, O_A, O_B, O_C lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, tâm đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C. Khi đó:

Ví dụ 1.2.1. Ta có tọa độ barycentric của một số điểm đặc biệt trong tam giác ABC :

- $I = (a : b : c) \equiv X\left(1\right),$
- $G = (1 : 1 : 1) \equiv X\left(2\right),$
- $O = (\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C) = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : ... : ...) \equiv X(3),$
- $O_A = (-a : b : c)\,; O_b = (a : -b : c)\,; O_C = (a : b : -c)\,,$
- $H = (\tan A : \tan B : \tan C) = \left(\dfrac{1}{b^2 + c^2 - a^2} : ... : ...\right) \equiv X\left(4\right).$